

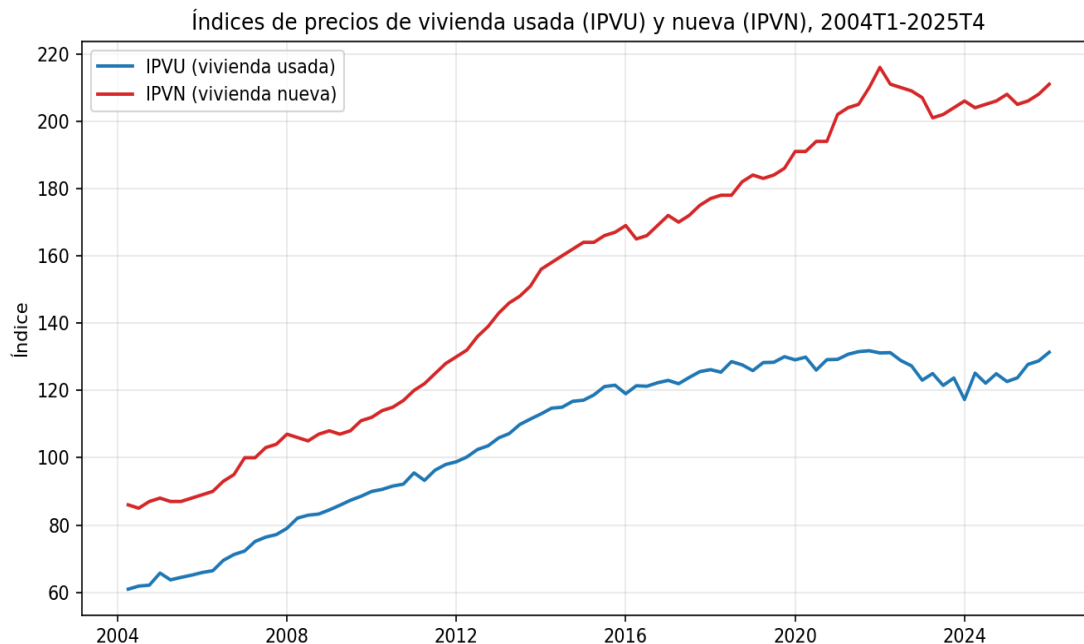
Modelización de precios de vivienda usada (IPVU) en función de precios de vivienda nueva (IPVN)

Comparación de modelos VAR, VEC y ARDL — Colombia, 2004T1–2025T4

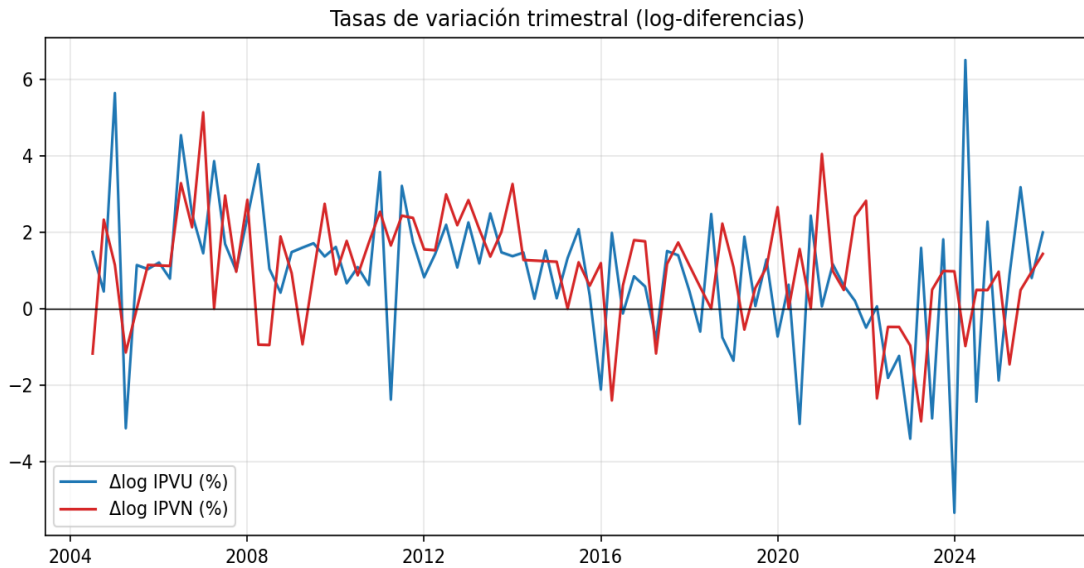
Datos trimestrales del Índice de Precios de Vivienda Usada (IPVU) y del Índice de Precios de Vivienda Nueva (IPVN), 88 observaciones (2004T1–2025T4). Se estiman y comparan tres especificaciones — VAR, VEC (VECM) y ARDL — para caracterizar la relación de IPVU en función de IPVN, y se selecciona el modelo más adecuado con base en diagnósticos de residuos, evidencia de cointegración y precisión de pronóstico fuera de muestra.

1. Datos y estadística descriptiva

La serie IPVU crece de 60,94 (2004T1) a 131,35 (2025T4); IPVN crece de 86 a 211 en el mismo periodo. Ambas series muestran una tendencia ascendente de largo plazo con una fase de corrección entre 2019 y 2023, seguida de una recuperación en 2024–2025.



Las tasas de variación trimestral (log-diferencias) de ambas series se muestran a continuación; se observa mayor volatilidad relativa en IPVU.



2. Estacionariedad de las series

Se aplicaron pruebas ADF (con constante y con constante+tendencia) y KPSS sobre niveles y primeras diferencias, en niveles originales y en logaritmos.

Serie	ADF (const.) estad.	ADF (const.) p- valor	ADF (const.+tend.) estad.	ADF (const.+tend.) p-valor
IPVU – nivel	-2,502	0,115	-0,842	0,962
IPVU – 1ª dif.	-2,684	0,077	-5,828	0,000
IPVN – nivel	-1,464	0,551	-1,756	0,726
IPVN – 1ª dif.	-3,178	0,021	-3,801	0,017
log(IPVU) – nivel	-3,697	0,004*	-1,151	0,920
log(IPVU) – 1ª dif.	-2,056	0,262	-6,406	0,000
log(IPVN) – nivel	-2,713	0,072	-0,545	0,982
log(IPVN) – 1ª dif.	-3,280	0,016	-4,298	0,003

* El rechazo puntual de la hipótesis nula en log(IPVU) con solo constante no se sostiene al incluir tendencia ni se corrobora con KPSS; se interpreta como evidencia débil/no robusta.

La prueba KPSS confirma no estacionariedad en niveles ($p=0,01$ en ambas series) y no rechaza estacionariedad en diferencias (IPVN: $p=0,10$; IPVU: $p=0,025$, límite).

Conclusión: ambas series se comportan como integradas de orden 1, $I(1)$ — no estacionarias en niveles, estacionarias en primeras diferencias.

3. Análisis de cointegración

Se aplicaron dos pruebas de cointegración sobre log(IPVU) y log(IPVN):

3.1 Prueba de Engle-Granger

Regresión	Estadístico	p-valor
log(IPVU) ~ log(IPVN)	-2,063	0,496
log(IPVN) ~ log(IPVU)	-1,911	0,575

En ambas direcciones no se rechaza la hipótesis nula de no cointegración ($p > 0,05$).

3.2 Prueba de Johansen (traza)

Con especificación de tendencia restringida (adecuada dado el crecimiento sostenido de ambas series) y rezago óptimo del VAR en niveles (2 rezagos, criterio BIC):

H0: rango $\leq$	Estadístico de traza	Valor crítico 95%	Decisión
0	9,967	18,40	No se rechaza

No se rechaza rango de cointegración = 0, es decir, la prueba de Johansen tampoco encuentra evidencia de cointegración bajo esta especificación (con constante no restringida, sin tendencia, el resultado es sensible a la especificación determinística y sugiere rango 2, lo que es inconsistente con la no estacionariedad hallada en la sección 2 y se atribuye a problemas de especificación/tamaño muestral).

Conclusión preliminar: la evidencia multivariante estándar (Engle-Granger y Johansen) no confirma cointegración entre IPVU e IPVN. Esta ambigüedad motiva el uso adicional de la prueba de cotas (bounds test) de Pesaran-Shin-Smith dentro del enfoque ARDL, que es más robusta cuando el orden de integración no es inequívoco y tiene mejores propiedades en muestras pequeñas (sección 6.2).

4. Modelo VAR

Dado que ambas series son $I(1)$ y la evidencia de cointegración es débil, el VAR se especifica en primeras diferencias de los logaritmos ($\Delta \log$ IPVU, $\Delta \log$ IPVN), lo que garantiza estacionariedad. El orden de rezago óptimo según BIC es $p=1$.

Ecuación	Variable	Coefficiente	p-valor
$\Delta \log$ IPVU	constante	0,0070	0,004
$\Delta \log$ IPVU	$\Delta \log$ IPVU (t-1)	-0,3208	0,001
$\Delta \log$ IPVU	$\Delta \log$ IPVN (t-1)	0,4401	0,001
$\Delta \log$ IPVN	constante	0,0070	0,000
$\Delta \log$ IPVN	$\Delta \log$ IPVU (t-1)	0,2683	0,000
$\Delta \log$ IPVN	$\Delta \log$ IPVN (t-1)	0,1244	0,213

El VAR es estable (raíces dentro del círculo unitario). Criterios de información: AIC=-16,75; BIC=-16,58; HQIC=-16,68.

Diagnóstico de residuos (ecuación $\Delta \log$ IPVU)

Prueba	p-valor	Resultado
LM autocorrelación (4 rezagos)	0,004	Se rechaza H0 → autocorrelación residual presente
Jarque-Bera (normalidad)	0,008	Se rechaza H0 → residuos no normales
ARCH-LM (4 rezagos)	0,187	No se rechaza H0 → sin heterocedasticidad

El VAR presenta autocorrelación residual remanente y no normalidad, señal de que un solo rezago puede ser insuficiente para capturar toda la dinámica de corto plazo.

5. Modelo VEC (VECM)

Pese a la evidencia mixta de cointegración, se estima un VECM con rango restringido a 1 (con fines comparativos, dado que el usuario solicita explícitamente este modelo), 1 rezago de diferencias y constante/tendencia no restringidas.

Relación de largo plazo (vector de cointegración normalizado en $\log$ IPVU)

$\log(\text{IPVU}) - 1,3434 \cdot \log(\text{IPVN}) = \text{constante} + \text{término estacionario}$ (coeficiente beta significativo, $p < 0,001$)

Coeficientes de ajuste (velocidad de corrección, α)

Ecuación	α (ajuste)	p-valor	Interpretación
$\Delta \log \text{IPVU}$	0,011	0,787	No significativo: IPVU no corrige hacia el equilibrio
$\Delta \log \text{IPVN}$	0,085	0,009	Significativo: es IPVN quien se ajusta al desequilibrio

Este resultado es relevante: si existiera una relación de equilibrio, los datos sugieren que es IPVN (no IPVU) quien se ajusta hacia ella, lo que debilita la interpretación de "IPVU en función de IPVN" bajo este marco VECM específico.

Diagnóstico de residuos (ecuación log IPVU)

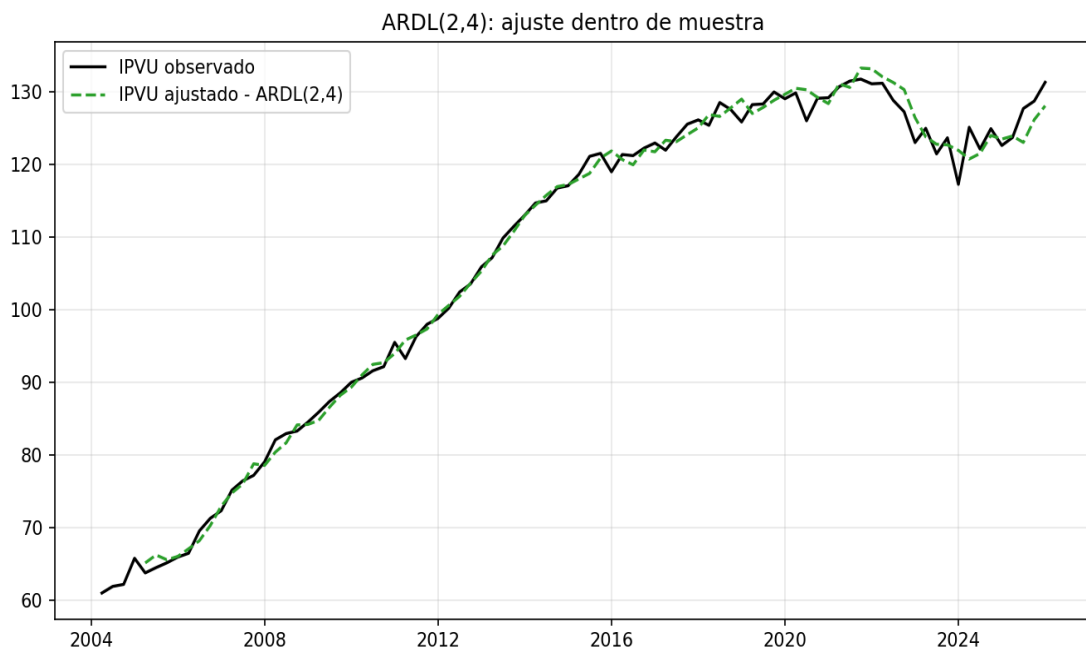
Prueba	p-valor	Resultado
LM autocorrelación (4 rezagos)	0,395	No se rechaza $H_0 \rightarrow$ sin autocorrelación
Jarque-Bera (normalidad)	0,079	No se rechaza $H_0 \rightarrow$ residuos aprox. normales
ARCH-LM (4 rezagos)	0,257	No se rechaza $H_0 \rightarrow$ sin heterocedasticidad

6. Modelo ARDL

Se seleccionó el orden ARDL(2,4) — 2 rezagos de log(IPVU) y hasta 4 rezagos de log(IPVN) — mediante minimización de AIC sobre una búsqueda con máximo de 6 rezagos por variable.

Variable	Coeficiente	p-valor
constante	0,1345	0,001
log IPVU (t-1)	0,5020	0,000
log IPVU (t-2)	0,4702	0,000
log IPVN (t)	0,1550	0,241
log IPVN (t-1)	0,1034	0,578
log IPVN (t-2)	-0,1649	0,369
log IPVN (t-3)	0,2246	0,217
log IPVN (t-4)	-0,3184	0,009

Ajuste: AIC=-472,10; BIC=-450,01; HQIC=-463,21.



6.1 Diagnóstico de residuos

Prueba	p-valor	Resultado
LM autocorrelación (4 rezagos)	0,787	No se rechaza H0 → sin autocorrelación
Jarque-Bera (normalidad)	0,380	No se rechaza H0 → residuos normales
ARCH-LM (4 rezagos)	0,375	No se rechaza H0 → sin heterocedasticidad

El ARDL es el único de los tres modelos que aprueba simultáneamente los tres diagnósticos de residuos (sin autocorrelación, normalidad, homocedasticidad).

6.2 Prueba de cotas (bounds test, Pesaran-Shin-Smith 2001)

Estadístico F	I(0) 95%	I(1) 95%	I(0) 99%	I(1) 99%	Decisión
6,364	3,802	4,812	5,172	6,322	F > cota superior I(1) al 95% → se rechaza H0 de no cointegración

A diferencia de Engle-Granger y Johansen, la prueba de cotas —más apropiada y potente cuando el orden de integración de las variables no es inequívoco— encuentra evidencia de una relación de largo plazo entre $\log(\text{IPVU})$ y $\log(\text{IPVN})$ al 5% (y cercana al 1%).

Nota de cautela: el multiplicador de largo plazo implícito en el ARDL (aprox. 0,01) resulta numéricamente inestable, porque la suma de los coeficientes autorregresivos de IPVU es muy cercana a 1 (0,972), lo que aproxima el denominador a cero. Por ello, para la magnitud de la elasticidad de largo plazo se recomienda apoyarse en el coeficiente del VECM ($\approx 1,34$) más que en el del ARDL, aunque la prueba de cotas del ARDL es la evidencia más confiable sobre la existencia de la relación.

7. Comparación de modelos y selección del mejor modelo

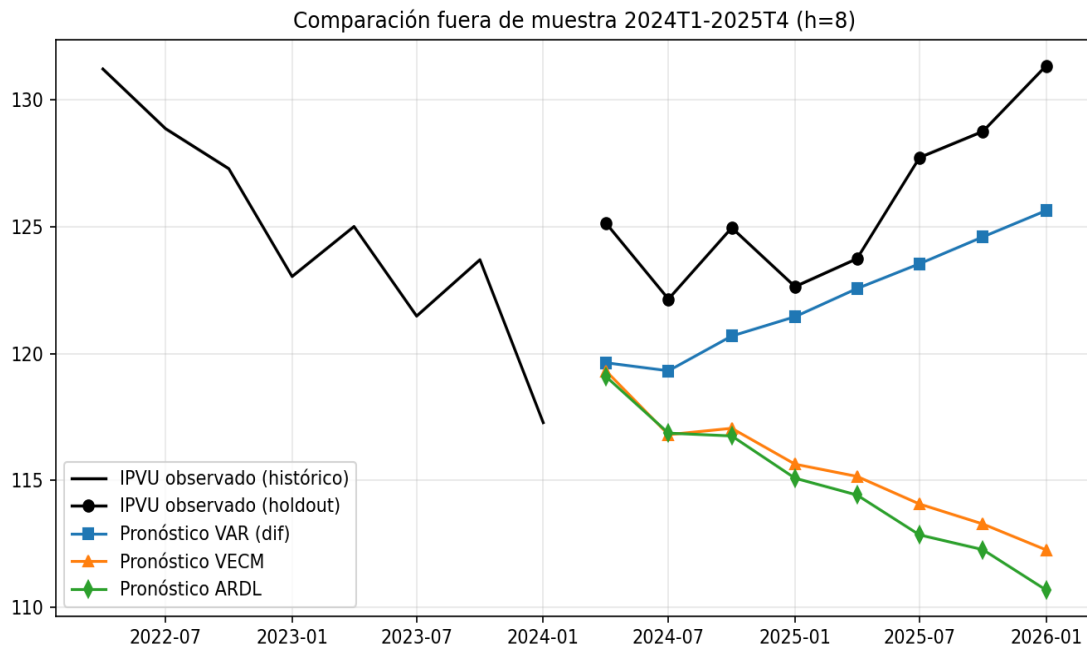
7.1 Ajuste y diagnóstico dentro de muestra

Criterio	VAR (dif.)	VECM	ARDL(2,4)
Especificación	$\Delta \log \text{IPVU}$, $\Delta \log \text{IPVN}$, $p=1$	log-niveles, rango=1, $k=1$	$\log \text{IPVU} \sim \log \text{IPVN}$, (2,4)
Evidencia de cointegración	N/A (modelo en diferencias)	Débil / ambigua	Sí (bounds test, 5%)
Autocorrelación residual (LM)	Rechazada ($p=0,004$)	No rechazada ($p=0,395$)	No rechazada ($p=0,787$)
Normalidad (Jarque-Bera)	Rechazada ($p=0,008$)	No rechazada ($p=0,079$)	No rechazada ($p=0,380$)
Heterocedasticidad (ARCH)	No rechazada ($p=0,187$)	No rechazada ($p=0,257$)	No rechazada ($p=0,375$)
Estabilidad	Estable	Estable	Estable

7.2 Precisión de pronóstico fuera de muestra (holdout 2024T1–2025T4, $h=8$ trimestres)

Los tres modelos se re-estiman con datos hasta 2023T4 y se pronostica IPVU 8 trimestres adelante. El ARDL se evalúa en su versión condicional (usando el IPVN observado), mientras que VAR y VECM pronostican ambas variables de forma conjunta y dinámica.

Modelo	RMSE	MAE	MAPE
VAR (diferencias)	3,98	3,63	2,86%
VECM (rango 1)	11,39	10,36	8,16%
ARDL(2,4) — condicional a IPVN	12,23	11,06	8,70%



El VECM y el ARDL subestiman sistemáticamente el repunte de IPVU observado en 2024–2025, porque su componente de corrección de error/dinámica de largo plazo extrapola la corrección a la baja de 2022–2023. El VAR en diferencias, al no imponer una relación de equilibrio de largo plazo, se adapta mejor al cambio de tendencia reciente.

7.3 Selección del mejor modelo

No existe un único criterio que favorezca al mismo modelo en todas las dimensiones evaluadas, por lo que la elección depende del objetivo:

- Para caracterizar la relación estructural "IPVU en función de IPVN" (relación de largo plazo + dinámica de corto plazo) con la mejor validación estadística: el ARDL(2,4) es el modelo recomendado. Es el único que aprueba los tres diagnósticos de residuos, y la prueba de cotas confirma una relación de cointegración que Engle-Granger y Johansen no logran validar con la misma claridad.
- Para pronóstico de corto plazo de IPVU: el VAR en diferencias es netamente superior (RMSE y MAPE 3 veces menores que VECM y ARDL en el ejercicio fuera de muestra 2024–2025), a costa de no ofrecer una relación de largo plazo interpretable.
- El VECM no domina en ninguno de los dos criterios: su evidencia de cointegración es débil, el ajuste de IPVU al desequilibrio no es significativo, y su desempeño de pronóstico es inferior al del VAR.

Recomendación final: se selecciona el modelo ARDL(2,4) como el mejor modelo para responder la pregunta planteada — la modelización de IPVU en función de IPVN — por su respaldo estadístico más sólido (bounds test y diagnósticos de residuos). Si el objetivo prioritario fuese pronosticar IPVU a corto plazo, se recomienda usar el VAR en diferencias en su lugar.

8. Conclusiones

- IPVU e IPVN son series I(1): no estacionarias en niveles, estacionarias en primeras diferencias (log).
- La evidencia de cointegración es sensible al método: Engle-Granger y Johansen no la confirman, pero la prueba de cotas del ARDL sí (5%), evidenciando la mayor potencia de este último enfoque en muestras pequeñas y ante orden de integración ambiguo.
- El ARDL(2,4) es el modelo mejor especificado en términos de diagnósticos residuales y evidencia de relación de largo plazo, y se recomienda como modelo principal.
- El VAR en primeras diferencias ofrece el mejor desempeño predictivo fuera de muestra en el periodo evaluado (2024–2025), por lo que es preferible si el uso es pronóstico de corto plazo.
- El coeficiente de largo plazo debe interpretarse con cautela: el ARDL lo estima de forma numéricamente inestable (cercano a raíz unitaria), mientras el VECM sugiere una elasticidad de aproximadamente 1,34.

Anexo: especificación técnica

Software: Python 3 / statsmodels 0.14. Transformación: logaritmo natural de ambas series. Selección de rezagos: criterio BIC para VAR/VECM (según señala parsimonia y menor riesgo de sobreparametrización en $n=88$); criterio AIC para ARDL (recomendado por Pesaran et al. 2001 en muestras pequeñas). Prueba de cotas: caso 3 (constante no restringida en el modelo, no incluida en el contraste). Ventana de evaluación fuera de muestra: 2024T1–2025T4 (8 trimestres), reestimación con datos 2004T1–2023T4.