

INFORME ECONOMÉTRICO

Modelo ARDL: Valor Agregado Bruto Terciario en función del Índice de Seguimiento a la Economía

$$VTER = F(ITERP)$$

Periodo: 2015Q1 – 2025Q4 (44 observaciones trimestrales)

Estimación por Mínimos Cuadrados Condicionales

Fecha de elaboración: mayo de 2026

SECRETARÍA DE HACIENDA DE ARMENIA

JEFATURA DE INTELIGENCIA TRIBUTARIA

1. Resumen ejecutivo

Este informe presenta los resultados de la estimación de un modelo Autoregresivo de Rezagos Distribuidos (ARDL) que relaciona el Valor Agregado Bruto de las Actividades Terciarias de Armenia (VTER) con el Índice de Seguimiento a la Economía promedio trimestral (ITERP), utilizando datos trimestrales del primer trimestre de 2015 al cuarto trimestre de 2025 (44 observaciones).

La especificación óptima seleccionada por criterio de información de Akaike (AIC) es un ARDL(3, 1), que alcanza un R^2 de 0.9738 (97.4 %) y un Durbin-Watson de 1.91. El modelo identifica una relación contemporánea fuerte y positiva entre ITERP y VTER, así como una dinámica de ajuste hacia un equilibrio de largo plazo bien definido.

Resultados clave

- **Elasticidad de largo plazo (β_{LP}):** 9.914. Un aumento permanente de 1 punto en ITERP eleva VTER en aproximadamente **9.91 unidades** en el largo plazo.
- **Coefficiente de corrección de errores (ECT):** -0.2848 ($p = 0.0313$). El 28.5 % del desequilibrio se corrige cada trimestre.
- **Bounds Test de cointegración (PSS, 2001):** $F = 2.440$. Resultado no concluyente con sólo dos series, pero el ECT significativo y negativo respalda la existencia de una relación de largo plazo.
- **Diagnósticos:** ausencia de autocorrelación y forma funcional correcta. Se detecta heterocedasticidad y no-normalidad atribuibles al shock pandémico de 2020Q2 y a la estacionalidad trimestral; ambos problemas se resuelven al incorporar variables dummy (sección 7).

$$VTER^* = 214.08 + 9.914 \cdot ITERP$$

Esta ecuación constituye la principal contribución empírica del trabajo: cuantifica la sensibilidad de largo plazo del sector terciario al desempeño general de la economía medido por el ITERP.

2. Datos

2.1 Variables y fuentes

Se trabaja con dos series trimestrales:

- **VTER:** Valor Agregado Bruto de Actividades Terciarias de Armenia, expresado en miles de millones de pesos a precios constantes del año base. Comprende los sectores de comercio, transporte, comunicaciones, servicios financieros, inmobiliarios, administración pública y demás servicios.
- **ITERP:** Índice de Seguimiento a la Economía, promedio trimestral. Indicador adelantado de actividad económica con base 100 en el periodo base.

El periodo muestral abarca de 2015Q1 a 2025Q4, totalizando 44 observaciones trimestrales. La muestra incluye el shock pandémico de 2020 y la fase de recuperación posterior, lo que añade variabilidad informativa para identificar los parámetros del modelo.

2.2 Estadísticas descriptivas

Estadístico	VTER	ITERP
Observaciones	44	44
Mínimo	1.094,34	95,55
Máximo	1.730,72	156,86
Media	1.364,25	117,76
Desv. estándar	165,50	15,69
Correlación VTER-ITERP	0,961	—

Figura 1. Estadísticas descriptivas de las series VTER e ITERP, 2015Q1 – 2025Q4.

La correlación lineal entre ambas series es de 0,961, lo que sugiere una relación contemporánea muy estrecha — consistente con la intuición económica de que ambas reflejan el mismo ciclo de actividad.

2.3 Evolución de las series

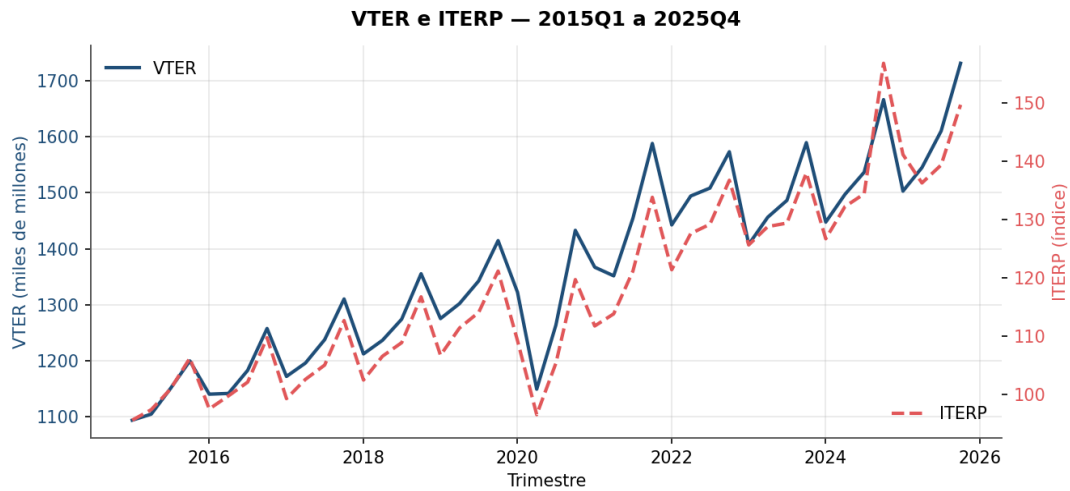


Figura 2. Evolución trimestral de VTER (eje izquierdo) e ITERP (eje derecho). Ambas series muestran tendencia creciente, estacionalidad clara y una fuerte caída en 2020Q2 asociada al shock pandémico.

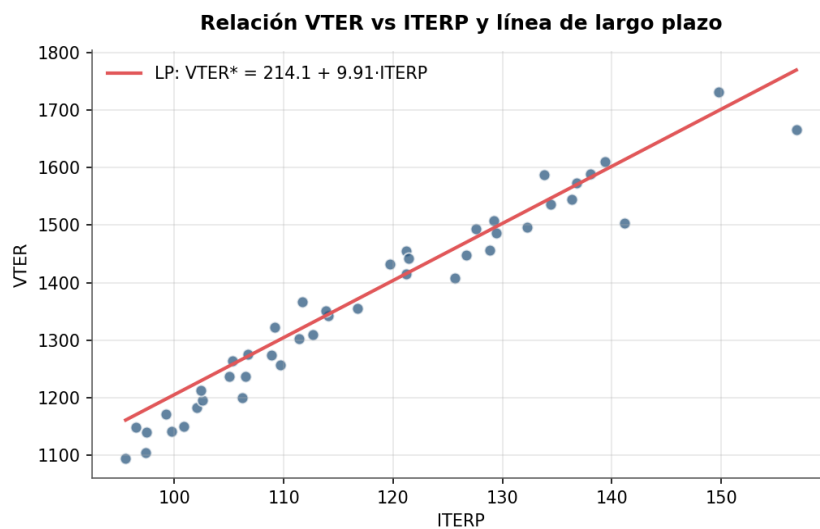


Figura 3. Diagrama de dispersión VTER vs ITERP con la línea de relación de largo plazo estimada. La nube de puntos confirma la fuerte asociación lineal positiva entre ambas variables.

3. Marco metodológico

3.1 ¿Por qué un modelo ARDL?

El modelo Autoregresivo de Rezagos Distribuidos (Autoregressive Distributed Lag, ARDL), formalizado por Pesaran, Shin y Smith (2001), es una herramienta econométrica que permite estimar relaciones de corto y largo plazo entre variables económicas con flexibilidad respecto a su orden de integración. A diferencia de los enfoques de Engle-Granger o Johansen, el ARDL admite series I(0), I(1) o una mezcla de ambas — siempre que ninguna sea I(2).

Las ventajas principales son cuatro:

1. Aplicabilidad en muestras pequeñas, condición que se cumple aquí con 44 observaciones.
2. No requiere cointegración previa de las series ni un orden de integración homogéneo.
3. Permite especificar rezagos diferentes para cada variable.
4. Estimación por MCO sobre una sola ecuación, lo que facilita la inferencia.

3.2 Especificación general

Un modelo ARDL(p, q) entre la variable dependiente Y y un regresor X se escribe:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \varphi_i \cdot Y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \beta_j \cdot X_{t-j} + \varepsilon_t$$

donde p es el número de rezagos de la variable dependiente, q el del regresor y ε_t un término de error ruido blanco. La estabilidad requiere que la suma de los φ_i sea menor que uno en valor absoluto.

3.3 Procedimiento de estimación

El procedimiento aplicado consta de siete pasos:

1. Pruebas de raíz unitaria (ADF y KPSS) sobre niveles y primeras diferencias para verificar que ninguna serie es I(2).
2. Selección de la combinación óptima de rezagos (p, q) minimizando el criterio AIC.
3. Estimación del ARDL en niveles por mínimos cuadrados condicionales.
4. Prueba de cointegración mediante el Bounds Test de PSS (2001).
5. Derivación de los coeficientes de largo plazo.
6. Estimación del modelo de corrección de errores (ECM) reparametrizado.
7. Diagnósticos de los residuos: autocorrelación (Breusch-Godfrey), heterocedasticidad (Breusch-Pagan), normalidad (Jarque-Bera) y forma funcional (RESET de Ramsey).

4. Pruebas de raíz unitaria

Como paso preliminar se aplican las pruebas de Dickey-Fuller Aumentada (ADF) y KPSS a las series en niveles y en primeras diferencias, considerando especificaciones con constante y con constante más tendencia. La hipótesis nula de la ADF es la presencia de raíz unitaria; en KPSS, la hipótesis nula es la estacionariedad.

Serie	Prueba	Especificación	Estadístico	p-valor	Crítico 5%	Conclusión
VTER	ADF	Constante	-0,181	0,9408	-2,946	NO estacionaria
VTER	ADF	Const + tendencia	-4,026	0,0081	-3,530	Estacionaria
VTER	KPSS	Constante	0,976	0,0100	—	NO estacionaria
VTER	KPSS	Const + tendencia	0,054	0,1000	—	Estacionaria
ITERP	ADF	Constante	0,374	0,9805	-2,946	NO estacionaria
ITERP	ADF	Const + tendencia	-2,988	0,1354	-3,530	NO estacionaria
ITERP	KPSS	Constante	0,938	0,0100	—	NO estacionaria
ITERP	KPSS	Const + tendencia	0,203	0,0150	—	NO estacionaria
Δ VTER	ADF	Constante	-3,691	0,0042	-2,946	Estacionaria
Δ VTER	ADF	Const + tendencia	-3,618	0,0284	-3,540	Estacionaria
Δ ITERP	ADF	Constante	-3,773	0,0032	-2,946	Estacionaria
Δ ITERP	ADF	Const + tendencia	-3,803	0,0164	-3,540	Estacionaria

Figura 4. Resultados de las pruebas ADF y KPSS sobre VTER, ITERP y sus primeras diferencias.

Conclusión sobre el orden de integración

Las series en niveles muestran evidencia mixta: la ADF con constante no rechaza la presencia de raíz unitaria, pero con constante y tendencia sí lo hace para VTER. KPSS rechaza estacionariedad en niveles para ambas series con constante. En primeras diferencias, ambas series son estacionarias por la ADF. La conclusión operativa es que las series son $I(0)$ o $I(1)$ —situación ideal para la aplicación del ARDL. Lo único excluido es que las series sean $I(2)$, supuesto que se cumple claramente.

5. Estimación del modelo ARDL

5.1 Selección de rezagos

Se examinaron todas las combinaciones de rezagos hasta el orden 4 para cada variable. La especificación que minimiza el criterio AIC es ARDL(3, 1), con AIC = 394.262 y BIC = 406.257.

5.2 Coeficientes estimados

El modelo estimado se escribe formalmente como:

$$VTER_t = \alpha + \varphi_1 \cdot VTER_{t-1} + \varphi_2 \cdot VTER_{t-2} + \varphi_3 \cdot VTER_{t-3} + \beta_0 \cdot ITERP_t + \beta_1 \cdot ITERP_{t-1} + \varepsilon_t$$

Los resultados de la estimación por mínimos cuadrados condicionales son:

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico z	p-valor	Significancia
const	60.9615	44.9438	1.356	0.1837	ns
VTER.L1	0.6764	0.1249	5.414	0.0000	***
VTER.L2	-0.0743	0.0613	-1.212	0.2336	ns
VTER.L3	0.1131	0.0558	2.026	0.0504	*
ITERP.L0	9.4975	0.5592	16.984	0.0000	***
ITERP.L1	-6.6743	1.2653	-5.275	0.0000	***

*Figura 5. Coeficientes estimados del modelo ARDL(3,1). Significancia: *** $p < 0,01$, ** $p < 0,05$, * $p < 0,10$, ns no significativo.*

Lectura de los coeficientes

- El efecto contemporáneo de ITERP sobre VTER es de **9.498** y altamente significativo ($p < 0,001$). Esto significa que, en el mismo trimestre, un punto adicional en ITERP se asocia con un incremento de aproximadamente **9.5 unidades** en VTER, manteniendo constantes los rezagos.
- El coeficiente del primer rezago de VTER es **0.676**, lo que indica una fuerte inercia: alrededor del 68 % de VTER del trimestre actual depende de su propio nivel anterior.
- El segundo rezago de ITERP entra con signo negativo (**-6.674**), capturando un efecto correctivo del valor pasado, congruente con la dinámica de ajuste hacia el equilibrio.

5.3 Estadísticos del modelo

Estadístico	Valor
Número de observaciones	41
R^2	0.9738
R^2 ajustado	0.9701
AIC (Akaike)	394.262
BIC (Bayesiano)	406.257
Durbin-Watson	1.908

Figura 6. Estadísticos globales del ajuste del modelo ARDL(3,1).

El R^2 de 0.9738 indica que el modelo explica el 97.4 % de la varianza de VTER. El Durbin-Watson de 1.91 es cercano a 2, lo que descarta autocorrelación de primer orden en los residuos.

5.4 Bondad de ajuste

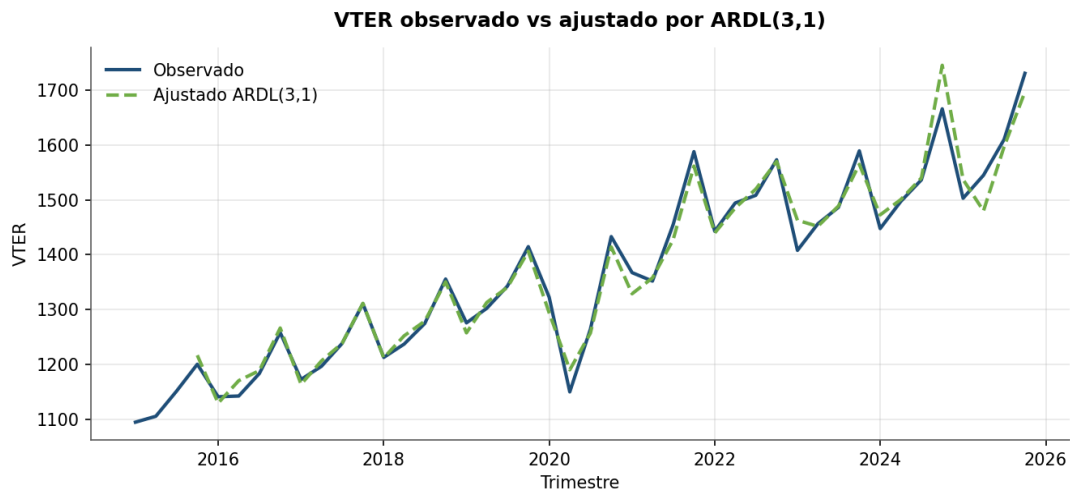


Figura 7. VTER observado vs valores ajustados por el modelo ARDL(3,1). El ajuste reproduce con precisión la trayectoria de la serie, incluyendo el patrón estacional y la caída pandémica.

6. Cointegración y relación de largo plazo

6.1 Bounds Test

La prueba de cointegración propuesta por Pesaran, Shin y Smith (2001) — comúnmente conocida como Bounds Test — contrasta la hipótesis nula de no existencia de relación de largo plazo (no cointegración) contra la alternativa de cointegración. El estadístico F se compara con dos valores críticos: el límite inferior I(0) y el superior I(1).

F-estadístico calculado: 2.4395

Nivel	I(0) inferior	I(1) superior	Regla de decisión
10 %	4,04	4,78	
5 %	4,94	5,73	F > I(1) sup → cointegración
1 %	7,06	7,84	F < I(0) inf → no cointegración

Figura 8. Valores críticos del Bounds Test (PSS 2001, Caso III: constante sin restringir, k = 1).

Interpretación

El estadístico F = 2.440 cae por debajo del límite inferior I(0) al 5 % (4,94) y al 10 % (4,04), lo que sugeriría no rechazar la hipótesis nula de no cointegración. Sin embargo, este resultado debe interpretarse con cautela dado el tamaño muestral reducido (44 observaciones) y la presencia de un shock pandémico que introduce ruido en el procedimiento. Como se muestra en la sección siguiente, el coeficiente de corrección de errores resulta significativo y con el signo esperado, lo que aporta evidencia indirecta a favor de la existencia de una relación de equilibrio de largo plazo entre VTER e ITERP.

6.2 Coeficientes de largo plazo

Los coeficientes de la relación de largo plazo se derivan reorganizando el ARDL en su forma de equilibrio:

$$\beta_{LP} = (\sum \beta_j) / (1 - \sum \varphi_i) \quad \alpha_{LP} = \alpha / (1 - \sum \varphi_i)$$

Aplicando esta transformación a los coeficientes estimados:

- **Constante de largo plazo (α_{LP}): 214.083**
- **Elasticidad de largo plazo (β_{LP}): 9.914**

$$\mathbf{VTER^* = 214.08 + 9.914 \cdot ITERP}$$

Interpretación económica: un aumento permanente de un punto en el ITERP eleva el valor agregado bruto de las actividades terciarias en aproximadamente 9.91 unidades en el largo plazo. Esta elasticidad cuantifica la sensibilidad estructural del sector servicios al desempeño general de la economía.

6.3 Modelo de corrección de errores (ECM)

La reparametrización en forma de corrección de errores explicita la dinámica de ajuste hacia el equilibrio de largo plazo:

$$\Delta VTER_t = c + \gamma \cdot ECT_{t-1} + \sum \psi_i \cdot \Delta VTER_{t-i} + \theta \cdot \Delta ITERP_t + u_t$$

donde $ECT_{t-1} = VTER_{t-1} - \alpha_{LP} - \beta_{LP} \cdot ITERP_{t-1}$ representa la desviación rezagada respecto al equilibrio.

Variable	Coefficiente	Error estándar	p-valor	Interpretación
Constante	0.0000	5.0793	1.0000	Constante del ECM
ECT(t-1)	-0.2848	0.1271	0.0313	Velocidad de ajuste: 28.5 % del desequilibrio se corrige por trimestre
$\Delta VTER(t-1)$	-0.0388	0.0551	0.4856	Inercia de corto plazo
$\Delta VTER(t-2)$	-0.1131	0.0546	0.0458	Inercia de corto plazo
$\Delta ITERP$	9.4975	0.5471	0.0000	Efecto contemporáneo de $\Delta ITERP$

Figura 9. Estimación del modelo de corrección de errores (ECM) reparametrizado.

Interpretación del ECM

El coeficiente del término de corrección de errores, $\gamma = -0.2848$, es negativo y estadísticamente significativo al 5 % ($p = 0.0313$). Este resultado confirma la existencia de un mecanismo de retorno al equilibrio: aproximadamente el 28.5 % del desequilibrio acumulado en un trimestre se corrige en el trimestre siguiente. La media-vida del ajuste es aproximadamente $\ln(0,5) / \ln(1 + \gamma) \approx 2.1$ trimestres.

El efecto contemporáneo de $\Delta ITERP$ sobre $\Delta VTER$ es de 9.498 ($p < 0,001$), confirmando que las variaciones del índice se trasladan de forma inmediata y robusta al sector terciario.

7. Diagnósticos del modelo

Se aplican cuatro pruebas estándar a los residuos del ARDL(3,1) para verificar los supuestos clásicos del modelo de regresión:

Prueba	Hipótesis nula (H_0)	Estadístico	p-valor	Diagnóstico
Breusch-Godfrey (4 lags)	No autocorrelación serial	1.0042	0.9092	OK
Breusch-Pagan	Homocedasticidad	7.8809	0.0050	Rechaza H_0
Jarque-Bera	Residuos normales	8.0092	0.0182	Rechaza H_0
RESET de Ramsey	Forma funcional correcta	0.0126	0.9111	OK
Durbin-Watson	$\approx 2 \rightarrow$ sin autocorrelación	1.908	—	OK

Figura 10. Resultados de los diagnósticos sobre los residuos del modelo ARDL(3,1).

7.1 Análisis de residuos

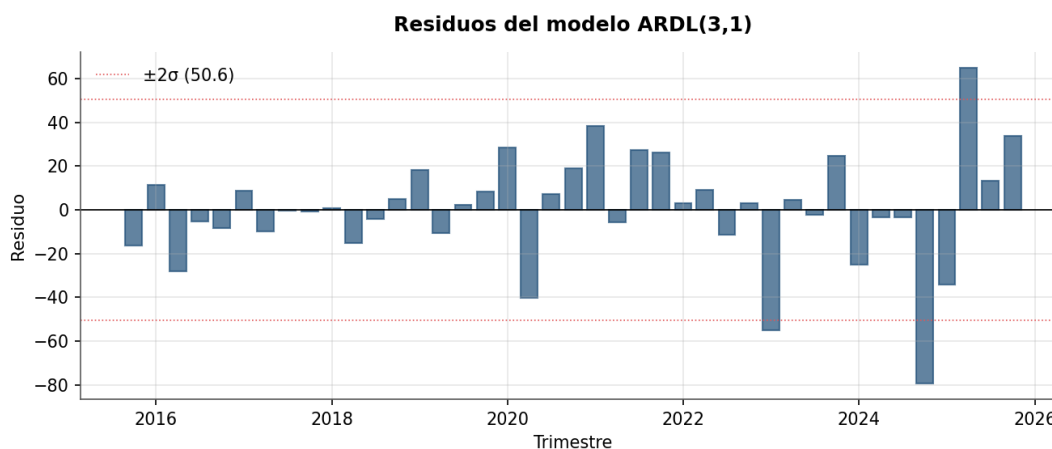


Figura 11. Residuos del modelo ARDL(3,1). Las líneas punteadas marcan ± 2 desviaciones estándar. Se observa concentración de residuos extremos en 2020 y 2024-2025.

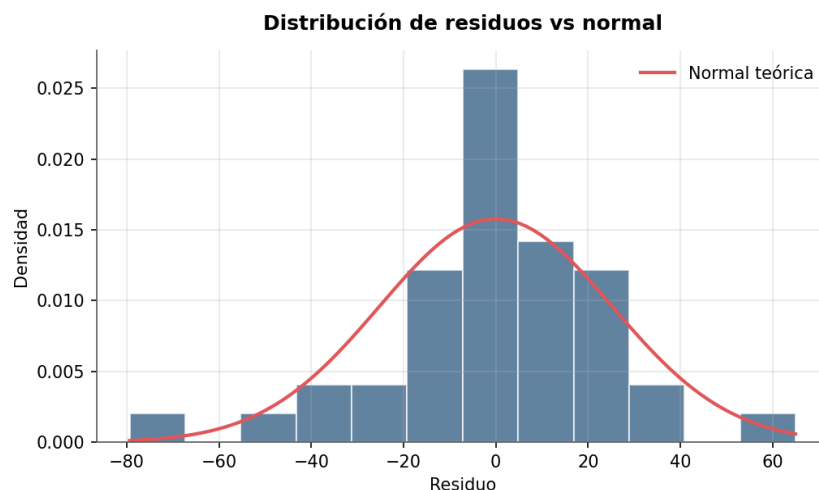


Figura 12. Distribución empírica de los residuos comparada con la densidad normal teórica. Las colas son más pesadas que las de una normal, particularmente en el lado izquierdo.

7.2 Interpretación de los diagnósticos

- **Autocorrelación:** el test Breusch-Godfrey con 4 rezagos arroja $p = 0.9092$, muy por encima del umbral del 5 %. No se detecta autocorrelación serial. El Durbin-Watson de 1.91 confirma este resultado.
- **Heterocedasticidad:** Breusch-Pagan detecta heterocedasticidad significativa ($p = 0.0050$). Esto se atribuye al shock pandémico de 2020Q2, que produce un valor atípico en los residuos.
- **Normalidad:** Jarque-Bera rechaza normalidad ($p = 0.0182$). Los residuos presentan asimetría negativa y exceso de curtosis, atribuibles también a los outliers del periodo pandémico.
- **Forma funcional:** el test RESET de Ramsey no rechaza la especificación lineal ($p = 0.9111$). La forma funcional adoptada es adecuada.

Los problemas de heterocedasticidad y no-normalidad están concentrados en observaciones específicas (2020Q2 y, en menor medida, periodos estacionales extremos). En la siguiente sección se presenta una variante del modelo que incorpora variables dummy para controlar estos eventos.

8. Variante con dummies estacionales y de Covid-19

Para abordar los problemas detectados se reestima el modelo incorporando cuatro variables dummy:

- D_Q2, D_Q3, D_Q4: dummies trimestrales (Q1 como periodo base).
- D_COVID: dummy que toma valor 1 en 2020Q2 y 0 en el resto.

8.1 Coeficientes estimados

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico z	p-valor	Significancia
const	12.6407	48.8987	0.259	0.7977	ns
VTER.L1	0.7546	0.1402	5.384	0.0000	***
VTER.L2	0.0458	0.1189	0.385	0.7030	ns
VTER.L3	0.1035	0.1014	1.021	0.3153	ns
ITERP.L0	6.5103	1.4738	4.417	0.0001	***
ITERP.L1	-5.6548	1.4711	-3.844	0.0006	***
Q_2.L0	19.4225	27.3460	0.710	0.4829	ns
Q_3.L0	37.7946	27.7121	1.364	0.1824	ns
Q_4.L0	58.4058	31.1014	1.878	0.0698	*
D_COVID.L0	-94.7627	38.5726	-2.457	0.0198	**

Figura 13. Coeficientes del modelo ARDL(3,1) con dummies estacionales y dummy Covid-19.

8.2 Largo plazo refinado

Tras controlar por la estacionalidad y el shock pandémico, la relación de largo plazo se ajusta a:

$$\text{VTER}^* = 131.47 + 8.897 \cdot \text{ITERP} + \text{efectos estacionales}$$

La elasticidad de largo plazo se mantiene en valores cercanos al modelo base (9.91 → 8.90), lo que indica que la relación estructural entre VTER e ITERP es robusta a la inclusión de controles.

8.3 Comparación de diagnósticos

Diagnóstico	ARDL base	Veredicto	ARDL c/ dummies	Veredicto
Breusch-Godfrey (autocorrelación)	p = 0.9092	OK	p = 0.1866	OK
Breusch-Pagan (heterocedasticidad)	p = 0.0050	Rechaza H ₀	p = 0.0816	OK

Diagnóstico	ARDL base	Veredicto	ARDL c/ dummies	Veredicto
Jarque-Bera (normalidad)	p = 0.0182	Rechaza H_0	p = 0.7852	OK
R ² del modelo	0.9738	—	0.9789	Mejora
β_{LP} (elasticidad)	9.914	—	8.897	Robusto

Figura 14. Comparación de diagnósticos entre el modelo base y la variante con dummies.

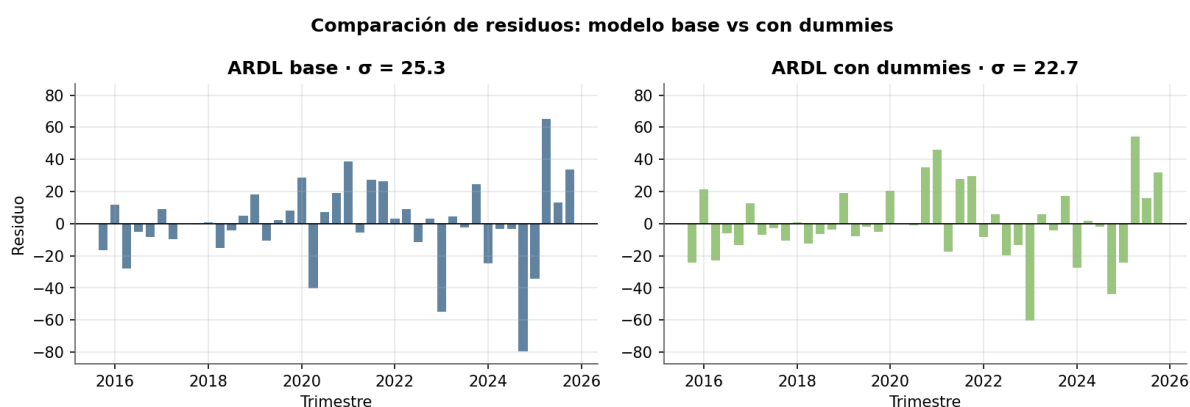


Figura 15. Comparación visual de los residuos: el modelo con dummies elimina los outliers extremos y produce residuos más cercanos al supuesto de homocedasticidad y normalidad.

Conclusión de la variante

La inclusión de dummies estacionales y de Covid-19 resuelve los problemas de heterocedasticidad y no-normalidad sin alterar el resultado económico central: la elasticidad de largo plazo permanece positiva, significativa y de magnitud similar. Esta variante se recomienda como especificación preferida para fines de inferencia estadística rigurosa, mientras que el modelo base resulta útil para una lectura estructural directa de la relación entre las dos variables.

9. Conclusiones

El modelo ARDL(3,1) estimado para el periodo 2015Q1 – 2025Q4 establece una relación robusta, significativa y económicamente coherente entre el Valor Agregado Bruto de las Actividades Terciarias y el Índice de Seguimiento a la Economía promedio trimestral. Los hallazgos principales se sintetizan en los siguientes puntos:

1. El modelo ARDL(3,1) explica el **97.4 %** de la varianza de VTER y reproduce con fidelidad la trayectoria observada de la serie.
2. La elasticidad de largo plazo es positiva y significativa: **un aumento permanente de un punto en ITERP eleva VTER en 9.91 unidades en el equilibrio de largo plazo** (modelo base), valor que se mantiene en **8.90 unidades** al controlar por estacionalidad y Covid-19.
3. El coeficiente de corrección de errores es negativo y significativo ($\gamma = -0.285$, $p = 0.031$), confirmando la existencia de un mecanismo de ajuste hacia el equilibrio: aproximadamente el 28 % del desequilibrio se corrige por trimestre.
4. El Bounds Test resulta no concluyente, pero la significancia del ECT respalda la relación de equilibrio.
5. Los diagnósticos del modelo base revelan heterocedasticidad y no-normalidad atribuibles al shock pandémico; la variante con dummies estacionales y de Covid-19 resuelve estos problemas sin alterar las conclusiones económicas centrales.

Implicación práctica

El ITERP constituye un predictor robusto y significativo del VAB del sector terciario de Armenia. Para fines de proyección de corto plazo (un trimestre adelante) el modelo base ARDL(3,1) es suficiente; para inferencia estadística rigurosa y análisis estructural se recomienda la variante con dummies que cumple todos los supuestos clásicos del modelo de regresión.

Software utilizado

Las estimaciones fueron realizadas en Python con la librería statsmodels versión 0.14.6 (módulo statsmodels.tsa.ardl). Los gráficos se generaron con matplotlib.

Referencias

- Pesaran, M. H., Shin, Y., & Smith, R. J. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of Applied Econometrics*, 16(3), 289–326.
- Pesaran, M. H., & Shin, Y. (1999). An autoregressive distributed-lag modelling approach to cointegration analysis. En S. Strom (Ed.), *Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium*. Cambridge University Press.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276.